## 四、Bohr理论的应用

### （1）定态 ( Stationary state ) 轨道半径

**电子绕核运动——库仑力**

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}$$

$$(mvr)^2=\frac{Ze^2mr}{4\pi\varepsilon_0}$$

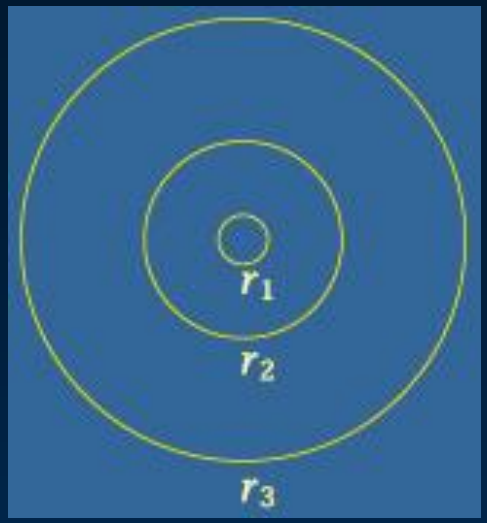
$$L=mvr=n\frac{h}{2\pi}$$

$$r_n=\frac{4\pi\varepsilon_0h^2}{4\pi^2mZe^2}n^2$$ —— **轨道半径**

$$r_n=\frac{a_0}{Z}n^2$$

$$a_0=0.053nm$$

—— **Bohr radius**




**氢原子：** $r=a_0n^2 \qquad n=1,2,\cdots$

### （2）定态 ( Stationary state ) 能量

**氢原子能量 = 电子动能与电势能之和**

$$E = E_k + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{1}{n^2}\left(-\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\right) = \frac{E_0}{n^2}$$

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$r = 4\pi\varepsilon_0\frac{h^2 n^2}{4\pi^2 me^2}$$

**氢原子能量 —— 量子化**

$$E = \frac{E_0}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2}(eV)$$

$n = 1 \rightarrow E_0 = -13.6eV$

**基态能量（电离能）**

$n = 2 \rightarrow E_1 = -3.4eV$

**第一激发态能量**

… …

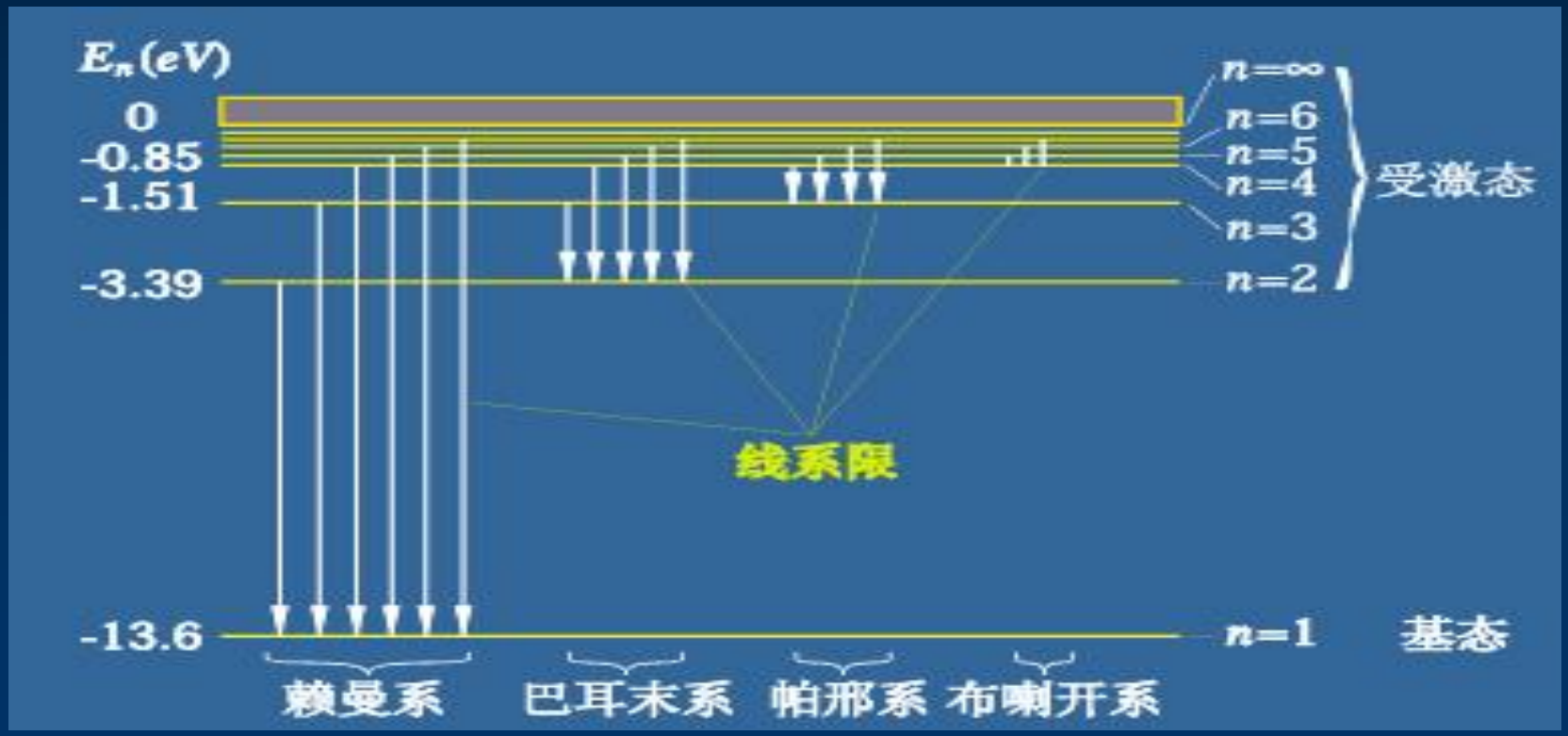
**(3) 对氢原子光谱的解释**

$$\tilde{\nu} = \frac{E_n - E_m}{hc} \Leftrightarrow E_n = \frac{E_0}{n^2} \quad E_m = \frac{E_0}{m^2}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = R_H'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

里德伯常量（理论值） $R_H' = \dfrac{me^4}{8\varepsilon_0^{\,2}h^3c} = 10973731m^{-1}$

Rydberg constant（实验值） $R_H = 10967758\mathrm{m}^{-1}$



# The Nobel Prize in Physics 1922

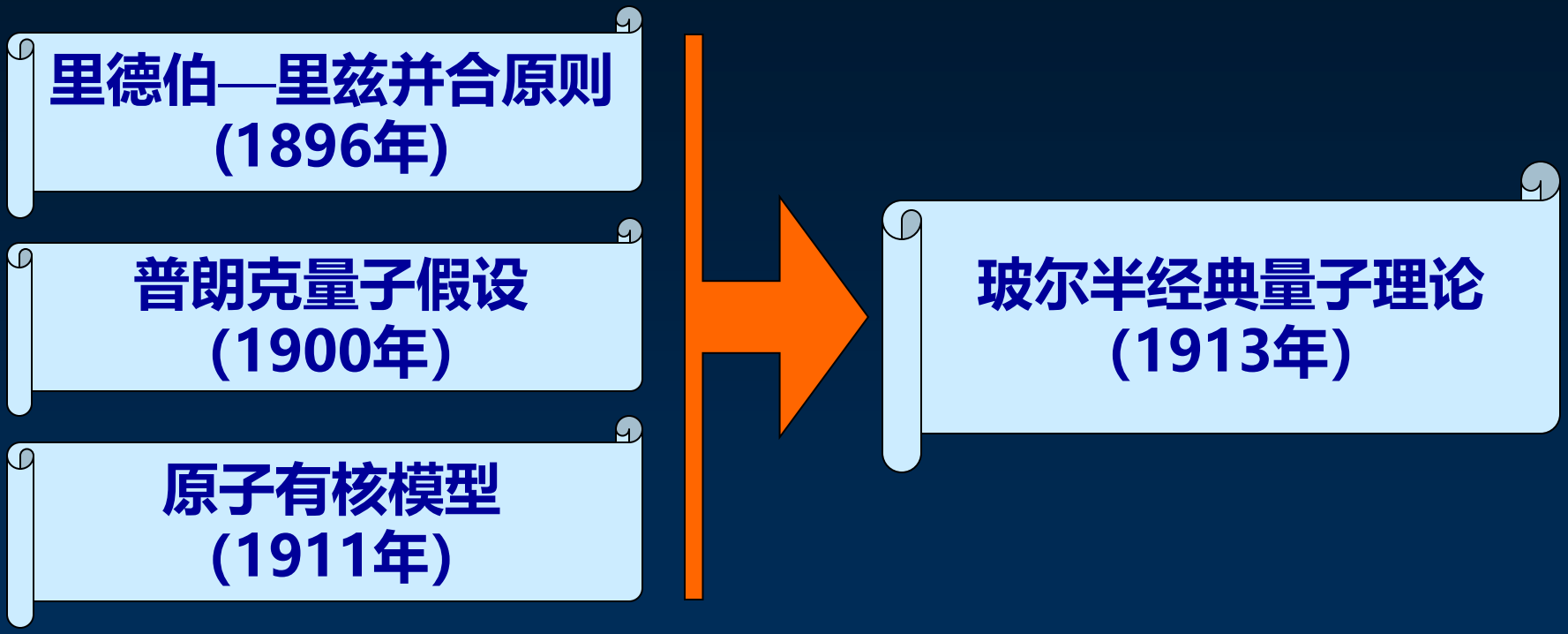
**"for his services in the investigation of the structure of atoms and of the radiation emanating from them".**

**In addition to his 1913 model, which pioneered the application of the quantum principle to the structure and spectra of atoms, Bohr developed the "Copenhagen Interpretation" of quantum mechanics and engaged in a series of debates with Einstein about quantum paradoxes.**



Bohr

## 五、玻尔理论的历史功绩和局限性




- 成功的把氢原子结构和光谱线结构联系起来。

首次打开人们认识原子结构的知识大门。创造性的提出了能量量子化、原子定态和角动量量子化概念等。

- 局限性：不能处理复杂原子光谱，无法给出强度分布。

没有完全跳出经典理论范畴，是量子论与经典论的混合物。

## 六、索莫非( A.Sommerfeld ) 椭圆轨道理论（1916年）

深入研究氢原子光谱 ⇨ 发现光谱的精细结构 ⇨ 修正玻尔理论——玻尔-索莫非理论

1. 电子绕核运动，轨道不限定是圆，**也可能是椭圆，**
   原子核在椭圆的一个焦点上

2. 索莫菲提出的两个量子化条件是

   1) 原子的能量是整数 $n$ 的函数

   $E = E(n) \quad n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$ $n$ —— 主量子数

   2) 电子的轨道角动量 $L$ 必须等于 $\hbar$ 的整数倍。

   $L = n_\varphi \hbar \quad n_\varphi = 1, 2, \cdots n$ $n_\varphi$ —— 角量子数

**由量子化条件，求椭圆长半轴和短半轴**

$$a = n^2 \frac{a_0}{Z}, b = \frac{n_\varphi}{n} a = n n_\varphi \frac{a_0}{Z}$$

$a_0$ —— 玻尔半径

**3. 能量关系**

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} m[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\varphi}{dt})^2] - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Longrightarrow E = -\frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 h^2}$$

在同一能级下包含着几个运动状态，称为能级的简并性。

**4. 索莫非氢原子能量（含相对论效应）**

$$E = -\frac{R_H hc}{n^2} Z^2 [1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n}(\frac{1}{n_\varphi} - \frac{3}{4n})]$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi e^2}{hc} \approx \frac{1}{137}$$

解释了氢原子的精细结构

精细结构常数

# 16-5 微观粒子的波粒二象性　不确定关系

## 一、德布罗意假设与物质波 ( Matter Wave )

| | 被重视 | 被忽视 |
|---|---|---|
| 光 波 | 波动性($\lambda$,$\nu$) | 粒子性 ($m$ ,$p$) |
| 实物粒子 | 粒子性($m$ ,$p$) | ? |

1924年，法国物理学家德布罗意（de Broglie ）提出假设:

实物粒子具有波动性，实物的波粒二象性(wave-particle dualism )与光子相类似

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$p = mv = h/\lambda$$

德布罗意关系

相对论效应情况下 $\nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{mc^2}{h} = \dfrac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$　$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0v}$

**非相对论效应情况下** $v \ll c$

$$eV = \frac{1}{2} m_0 v^2 \Longrightarrow m_0 v = \sqrt{2 e m_0 V}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2 e m_0 V}} = \frac{12.25}{\sqrt{V}} \overset{0}{A}$$

当 $V = 150(V)$

$\lambda = 1.0 \overset{0}{A}$

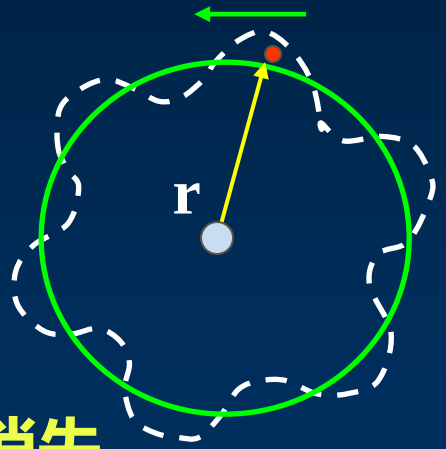
当 $V = 10000(V)$

$\lambda = 0.1225 \overset{0}{A}$

**用德布罗意物质波分析玻尔量子化条件**

**波长为 $\lambda$ 的物质波沿半径为 $r$ 的圆周环行时，则环行波满足**

$$2\pi r = n\lambda \qquad n = 1,2,3,\cdots$$




**否则，各点激起的振动将相继削弱，使波动消失。**

$2\pi r = n\lambda$ ⟹ **环行驻波** ⟺ $\lambda = \dfrac{h}{m_0 v}$

⟹ $\boxed{m_0 v r = n \dfrac{h}{2\pi}}$ **玻尔理论的电子轨道角动量量子化条件**

**例1：** 设电子的总能量可写成动能和静能之和。试推导出计算物质波波长公式，以及当电子速度比光速小得多时的近似式。

**解：** $E^2 = c^2 p^2 + m_0{}^2 c^4$

$$p = \frac{1}{c}(E^2 - m_0{}^2 c^4)^{1/2} = \frac{1}{c}[(E_k + m_0 c^2)^2 - m_0{}^2 c^4]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{E_k{}^2 + 2m_0 c^2 E_k}$$

由德布罗意关系，有

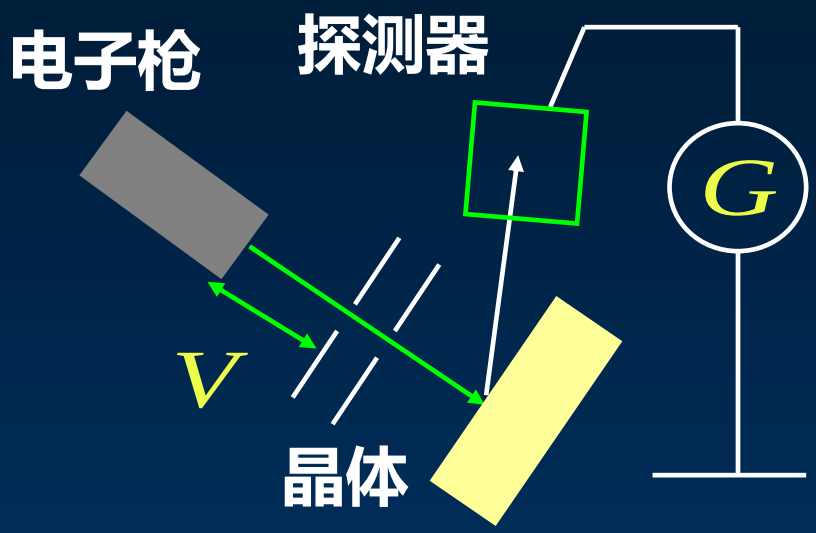
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{ch}{\sqrt{E_k{}^2 + 2m_0 c^2 E_k}} \xrightarrow{v \ll c} \lambda \approx \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}$$

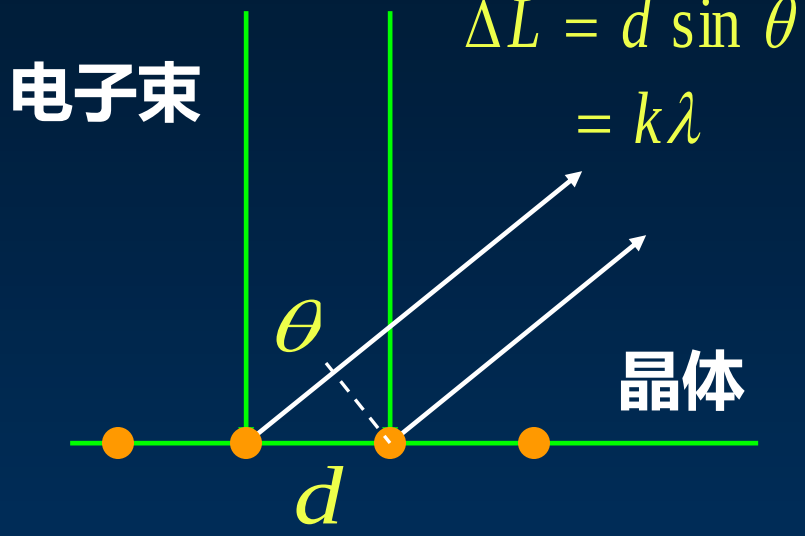
**例2：** 宏观子弹 $m = 0.05kg,\quad v = 60m/s$，则德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 2.25 \times 10^{-35} m$$

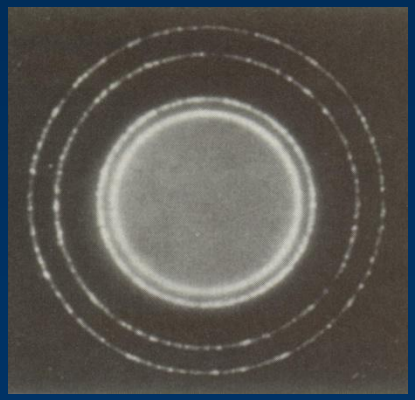
## 二、戴维孙（C.J.Davisson）和革末（L.H.Germer）实验

1927年，实验观察到电子衍射，证实电子具有波性。

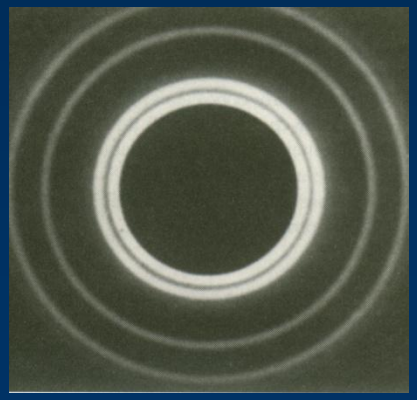



戴维孙 — 革末
电子散射实验
（波长相同）



X射线



电子束

布拉格公式 $\lambda = 0.165nm$

德布罗意公式 $\lambda = 0.167nm$

1961年，约恩荪（C.Jonson）电子衍射实验，衍射图样为



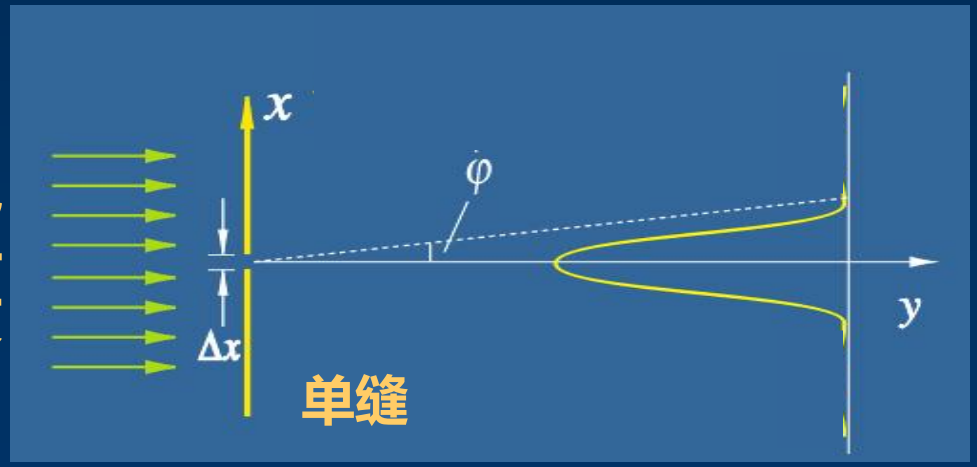

结论：波粒二象性是所有物质的普遍属性，是“遍及整个物质世界的一种绝对普遍的现象”。

## 三、不确定关系

### 1. 电子衍射实验的估计

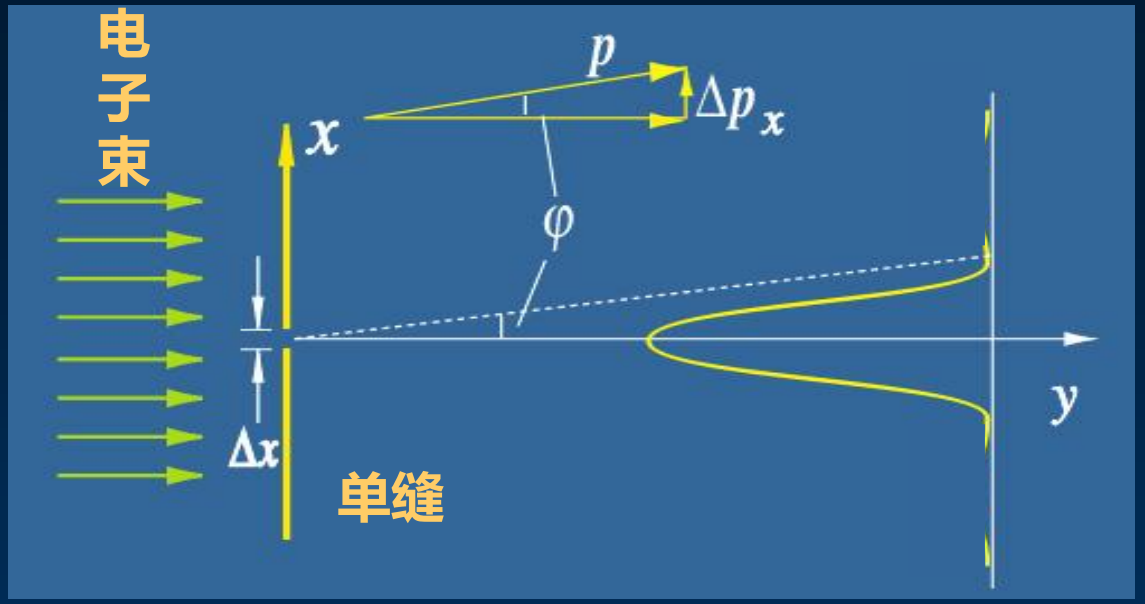
根据单缝衍射暗纹公式

$$\Delta x \sin \varphi_k = k\lambda$$



$$\Delta x \sin \varphi_k = k\lambda$$

其中 $\lambda$ 为电子波长




★ 电子位置在 $x$ 方向上的不确定量 $\Delta x$

☆ 电子动量在 $x$ 方向上的不确定量?

$$0 \le p_x \le p \sin \varphi$$

$$\Delta p_x = p \sin \varphi - 0$$

考虑到次极大 $\Delta p_x \ge p \sin \varphi = \dfrac{h}{\lambda} \sin \varphi = \dfrac{h}{\lambda} \dfrac{\lambda}{\Delta x} = \dfrac{h}{\Delta x}$

$$\Delta p_x \Delta x \ge h$$

—— 动量和位置的不确定关系

当粒子位置的不确定度 $\Delta x$ 小时，动量不确定度 $\Delta p_x$ 就大，反之亦然。即微观粒子不能同时具有确定的动量和位置。

**讨论：1. 1927年，德国物理学家海森堡提出：**

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2 \\ \Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2 \end{cases}$$

否定了轨道与速度的唯一性

**注意：不确定关系表示了微观粒子运动的波粒二象性。**

**“不确定”不是由于测量仪器或方法的缺陷，而是由于微观粒子运动的固有性质引起的。**

**例：子弹** $m = 0.01kg$ **枪口直径** $d = 0.5cm$ $\Delta v_x = ?$

**解：** $\Delta p_x \Delta x = \hbar = m \Delta v_x \Delta x = m d \Delta v_x$

$$\Delta v_x = \frac{\hbar}{md} = 2.2 \times 10^{-30} m/s$$

**不确定度太小，可忽略。**

**对微观电子** $\Delta x = 10^{-10} m$ $\Delta v_x = ?$

$$\Delta v_x = \hbar / 2m\Delta x = 0.6 \times 10^6 m/s \approx v_x$$

**不能将电子运动视为经典粒子进行处理。**